

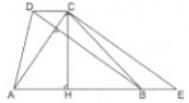
Софийски Университет “Св. Климент Охридски”
Писмен конкурсен изпит по математика, 12 април 2009г.

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ - ТЕМА 1

Задача 1. Да се реши уравнението $\frac{2}{x^2 - 4} + \frac{x - 4}{x^2 + 2x} = \frac{1}{x^2 - 2x}$.

Решение. Тъй като $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, $x^2 + 2x = x(x + 2)$ и $x^2 - 2x = x(x - 2)$, уравнението има смисъл при $x \neq -2$, $x \neq 0$ и $x \neq 2$. След привеждане под общ знаменател достигаме до уравнението $x^2 - 5x + 6 = 0$, чийто корени са $x = 2$ и $x = 3$. Единственият корен на даденото уравнение е $x = 3$.

Задача 2. Да се намери лицето на трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) с височина 12, ако диагоналите AC и BD са взаимно перпендикуляри и $AC = 15$.



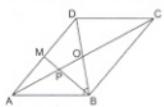
Решение. Построяваме отсечката $CE \parallel BD$ ($E \in AB$). Тогава $\angle ACE = 90^\circ$, $BE = CD$ и $AE = AB + CD$. Нека $CH \perp AE$ ($H \in AE$). От правоъгълните триъгълници AHC и ACE последователно пресмятаме $AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = 9$ и $AE = AC^2/AH = 25$.

Следователно $S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot CH = \frac{1}{2} AE \cdot CH = 150$.

Задача 3. Да се реши уравнението $\sin^4 x + 3 \cos^2 x = 1$.

Решение. Тъй като $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, уравнението е еквивалентно на квадратното уравнение (относно $\sin^2 x$) $\sin^4 x - 3 \sin^2 x + 2 = 0$, чинто корени са $\sin^2 x = 2$ и $\sin^2 x = 1$. Понеже $\sin^2 x \leq 1$ за всяко x , уравнението $\sin^2 x = 2$ няма решение, а решението на уравнението $\sin^2 x = 1$ са $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Задача 4. В успоредник $ABCD$ ъглополовящата на $\angle ABD$ пресича диагонала AC в точка P , така че $AP : PC = 1 : 2$. Да се намерят дължините на страните на успоредника, ако $AC = 2\sqrt{97}$ и $BP = \frac{16}{3}$.



Решение. Нека O е пресечната точка на диагоналите AC и BD . Понеже O е среда на AC , от $AP : PC = 1 : 2$ следва $AP = \frac{1}{3}AC = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3}(AP + PO)$, т.e. $AP = 2PO = \frac{2}{3}\sqrt{97}$. От тук и свойството на ъглополовящата получаваме $AB = 2BO = BD$. От формулата за ъглополовящата в ΔABO , $BP^2 = AB \cdot BO - AP \cdot PO$ намираме $AB = 10$. От $BD = AB$ и равенството $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$ получаваме $AD = 12$.

Задача 5. Да се реши неравенството $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} \geq x - 2$.

Решение. Неравенството има смисъл при $x - 1 \geq 0$ и $x - 2\sqrt{x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x - 1} - 1)^2 \geq 0$, т.e. при $x \geq 1$. Всяко $x \in [1, 2]$ е решение на даденото неравенство, тъй като лявата му страна е положителна, а дясната е неположителна. При $x > 2$, след повдигане на квадрат се получава еквивалентното неравенство $x^2 - 8x + 8 \leq 0$, чинто решенията предвид $x > 2$, са $x \in (2, 4 + 2\sqrt{2}]$. Обединяваме двета случая и получаваме, че решението на даденото неравенство са $x \in [1, 4 + 2\sqrt{2}]$.

Задача 6. Да се определят стойностите на x , за които е дефинирана функцията $f(x) = \log_{\frac{3}{5}}(x^2 + 8x - 9) - 2 \log_{\frac{3}{5}}x$, и да се намери най-малката стойност на $f(x)$.

Решение. Функцията $f(x)$ е дефинирана при $x^2 + 8x - 9 > 0$ и $x > 1$. От тук намираме, че дефиниционната област на $f(x)$ е $x > 1$, и тогава $f(x) = \log_{\frac{3}{5}} \frac{x^2 + 8x - 9}{x^2} = \log_{\frac{3}{5}} \left(1 + 8 \frac{1}{x} - 9 \left(\frac{1}{x}\right)^2\right)$. Разглеждаме функцията $g(x) = -9\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 8\frac{1}{x} + 1$, тя е квадратен тричлен относно $\frac{1}{x}$, и най-голямата ѝ стойност в интервала $(1, \infty)$ е $g\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{25}{9}$. Тъй като логаритмичната функция при основа $\frac{3}{5} < 1$ е намаляваща, най-малката стойност на $f(x)$ в интервала $(1, \infty)$ е $f\left(\frac{9}{4}\right) = \log_{\frac{3}{5}} \frac{25}{4} = \log_{\frac{3}{5}} \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = -2$.

Задача 7. Да се реши уравнението $|x - 2| + |2x - 8| = 3^ax - 9^a - 1$, където a е реален параметър.

Решение. Случай 1: $x \leq 2$. Уравнението е $2 - x + 8 - 2x = 3^ax - 9^a - 1 \Leftrightarrow (3^a + 3)x = 9^a + 11$, откъдето $x = \frac{9^a + 11}{3^a + 3}$.

Условието $\frac{9^a + 11}{3^a + 3} \leq 2$ е еквивалентно на $3^{2a} - 2 \cdot 3^a + 5 \leq 0$, и не е изпълнено за никоя стойност на a . Следователно

уравнението няма решение в $(-\infty, 2]$. Случай 2: $2 < x < 4$. Сега уравнението е $x - 2 + 8 - 2x = 3^ax - 9^a - 1 \Leftrightarrow (3^a + 1)x = 9^a + 7$, откъдето $x = \frac{9^a + 7}{3^a + 1}$. Условието $\frac{9^a + 7}{3^a + 1} > 2 \Leftrightarrow (3^a)^2 - 2 \cdot 3^a + 5 > 0$ е изпълнено за всяко a , а

условието $\frac{9^a + 7}{3^a + 1} < 4 \Leftrightarrow (3^a)^2 - 4 \cdot 3^a + 3 < 0 \Leftrightarrow (3^a - 1)(3^a - 3) < 0 \Leftrightarrow 1 < 3^a < 3$ дава $0 < a < 1$. Така в този

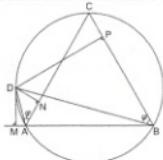
случай при $a \leq 0$ или $a \geq 1$ уравнението няма решение, а при $a \in (0, 1)$ има единствен корен $x = \frac{9^a + 7}{3^a + 1}$.

Случай 3: $x \geq 4$. Тогава уравнението става $x - 2 + 2x - 8 = 3^ax - 9^a - 1 \Leftrightarrow (3^a - 3)x = 9^a - 9 \Leftrightarrow (3^a - 3)x = (3^a - 3)(3^a + 3)$. Ако $3^a = 3$, т.e. $a = 1$, всяко $x \geq 4$ е корен на даденото уравнение. Ако $a \neq 1$, тогава $x = 3^a + 3$, и условието $3^a + 3 \geq 4 \Leftrightarrow 3^a \geq 1$ дава $a \geq 0$. Така в този случай, ако $a \in (-\infty, 0)$, уравнението няма решение; ако

$a \in [0, 1) \cup (1, \infty)$, уравнението има единствен корен $x = 3^a + 3$; ако $a = 1$, всяко $x \in [4, \infty)$ е корен. Отбелязваме, че при $a = 0$, $3^a + 3 = 4$.

Окончателно: при $a \in (-\infty, 0)$ уравнението няма решение; при $a = 0$ - има единствен корен $x = 4$; при $a \in (0, 1)$ - има два корена $x_1 = \frac{9^a + 7}{3^a + 1}$ и $x_2 = 3^a + 3$; при $a = 1$, решение е всяко $x \geq 4$; при $a > 1$ - уравнението има единствен корен $x_2 = 3^a + 3$.

Задача 8. В окръжност с радиус 1 е вписан равностранен триъгълник ABC . От точка D , лежаща върху дъгата \widehat{AC} , която не съдържа точката B , са спуснати перпендикуляри към правите AB , AC и BC , които ги пресичат съответно в точките M , N и P . Да се намери най-голямата стойност на $DM + DN + DP$.



Решение. Нека $\angle DAC = \angle DBC = \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$. От синусовата теорема за $\triangle ABD$ намираме $DA = 2 \sin(\frac{\pi}{3} - \varphi)$, $DB = 2 \sin(\frac{\pi}{3} + \varphi)$. От правоъгълните триъгълници ADN , BDM и BDP последователно изразяваме $DN = DA \sin \varphi = 2 \sin(\frac{\pi}{3} - \varphi) \sin \varphi$, $DM = DB \sin(\frac{\pi}{3} - \varphi) = 2 \sin(\frac{\pi}{3} + \varphi) \sin(\frac{\pi}{3} - \varphi)$, $DP = DB \sin \varphi = 2 \sin(\frac{\pi}{3} + \varphi) \sin \varphi$. Тогава

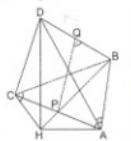
$$DM + DN + DP = 2 \left(\sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right) \sin \varphi + \sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) \sin \varphi \right) = f(\varphi).$$

От формулите за преобразуване на произведение и сума от синуси получаваме

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right) = \cos 2\varphi - \cos \frac{2\pi}{3} = \cos 2\varphi - \frac{1}{2}, \quad 2 \sin \varphi \left(\sin\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) \right) = 4 \sin \varphi \sin \frac{\pi}{3} \cos \varphi = \sqrt{3} \sin 2\varphi.$$

От тук, $f(\varphi) = \frac{1}{2} + \cos 2\varphi + \sqrt{3} \sin 2\varphi = \frac{1}{2} + 2 \left(\cos 2\varphi \cos \frac{\pi}{3} + \sin 2\varphi \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\varphi\right)$. От $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\varphi\right) \leq 1$ и $-\frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3} - 2\varphi \leq \frac{\pi}{3}$ следва, че най-голямата стойност на $f(\varphi)$ е $\frac{1}{2}$, и тя се достига при $\varphi = \frac{\pi}{6}$, т.e. когато D е средата на дъгата AC .

Задача 9. В триъгълна пирамида $ABCD$ ортогоналната проекция на върха D върху равнината на основата ABC лежи на описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Ръбовете BD и AC са взаимно перпендикуляри, и околните стени ABD и BCD сключват с основата ъгли, равни на 60° . Да се намери обемът на пирамидата, ако $\angle ABC = 60^\circ$ и разстоянието между правите BD и AC е $3\sqrt{\frac{3}{7}}$.



Решение. Нека H е ортогоналната проекция на върха D върху равнината на основата. Тъй като $BD \perp AC$ и BH е ортогоналната проекция на BD върху (ABC) , от теоремата за трите перпендикуляри следва, че $BH \perp AC$. Понеже околните стени ABD и BCD сключват равни ъгли с основата, то BH е и ъглополовища на $\angle ABC$. Тогава BH е симетралата на отсечката AC , откъдето $AB = BC = AC$ (понеже $\angle ABC = 60^\circ$), и BH е диаметър на описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Следователно $H \perp AB$, и от теоремата за трите перпендикуляри имаме $AD \perp AB$. Така ъгълът, който околната стена ABD сключва с основата ABC , е $\angle DAB = 60^\circ$.

Нека P е средата на отсечката AC и $PQ \perp BD$ ($Q \in BD$). Тъй като ортогоналната проекция на PQ лежи на правата BH и $BH \perp AC$, от теоремата за трите перпендикуляри следва $PQ \perp AC$. Така разстоянието между правите BD и AC е $PQ = 3\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Нека $BH = 2R$. Тогава $BP = \frac{3}{2}R$, $AH = R$, $AB = R\sqrt{3}$, и от правоъгълните триъгълници DHA и DAB намираме $DH = R\sqrt{3}$, $DA = 2R$ и $BD = R\sqrt{7}$. От $\triangle DHB \sim \triangle PQB$ имаме $DH : PQ = BD : BP$, откъдето $DH = 2\sqrt{3}$. Сега от $DH = R\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ намираме $R = 2$. Така за обема на пирамидата получаваме $V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot DH = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot DH = 6$.

Задача 10. Нека $f(x) = x^3 - 3x + a$ и $g(x) = x^2 - 1$, където a е реален параметър. Да се намерят всички стойности на a , такива че при всяко реално число c , уравнението $f(x) + cg(x) = 0$ има три различни реални корена.

Решение. Нека $h(x) = f(x) + cg(x)$, и a е такова, че $h(x)$ има три различни реални корена за всяка стойност на c . Тогава това ще бъде изпълнено и при $c = 0$, т.e. при $h(x) = f(x)$. Имаме $f'(x) = 3(x^2 - 1)$, $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (-1, 1)$. Затова $f(x)$ расте в интервала $(-\infty, -1)$, намалява в $(-1, 1)$ и расте в интервала $(1, \infty)$. Следователно във всеки от тези три интервала $f(x)$ има най-много по един корен. Освен това, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. От тук и теоремата на Болцано заключаваме, че броят на реалните корени на $f(x)$ се определя от стойностите $f(-1) = a + 2$ и $f(1) = a - 2$. Ако $f(-1) \leq 0$, то $f(x) < 0$ за всяка $x \in (-\infty, 1)$, $x \neq -1$, и $f(x)$ ще има най-много два различни реални корена (само един, ако $f(-1) < 0$). Аналогично, ако $f(1) \geq 0$, то $f(x) > 0$ за всяко $x \in [-1, \infty)$, $x \neq 1$, и $f(x)$ ще има най-много два различни реални корена (само един, ако $f(1) > 0$). Следователно, за да има $f(x)$, a значи и $h(x)$, три различни реални корени, е необходимо $f(-1) > 0$ и $f(1) < 0$, откъдето получаваме $a \in (-2, 2)$.

Нека сега $a \in (-2, 2)$. При всяко c имаме $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$, $h(-1) = a + 2 > 0$, $h(1) = a - 2 < 0$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \infty$.

От тук и от теоремата на Болцано следва, че $h(x)$ има поне по един корен във всеки от интервалите $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$, и значи $h(x)$ има точно три различни реални корена. Отговор: $a \in (-2, 2)$.

Пълното решение на всяка задача се оценява с 4 точки. Оценката се получава по формулата $2 + 0,1N$, където N е броят на получените точки.