Софийски Университет „Св. Климент Охридски”
Писмен конкурсен изпит по математика
10 юли 2008 г.

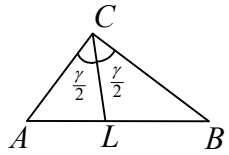
ЗАДАЧИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ – ТЕМА 3

Задача 1. Вторият и петият член на геометрична прогресия са съответно равни на 14 и 112. Да се намери сборът на първите 6 члена.

Решение: Нека a_1 и q са първият член и частното на прогресията. От $a_2 = a_1 q = 14$ и $a_5 = a_1 q^4 = 112$ намираме $q^3 = 8$, откъдето $q = 2$ и $a_1 = 7$. Тогава $S_6 = a_1 \frac{q^6-1}{q-1} = 7\frac{2^6-1}{2-1} = 7.63 = 441$.

Задача 2. Даден е триъгълник ABC със страни $CA = 3$, $CB = 4$ и ъглополовяща $CL = \frac{12\sqrt{2}}{7}$. Да се намери лицето на триъгълника.

Решение: Нека $\sphericalangle ACB = \gamma$. Тогава по формулата за ъглополовящата $l_c = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2}$ имаме $\frac{12\sqrt{2}}{7} = \frac{2.3.4}{3+4}\cos\frac{\gamma}{2}$, откъдето $\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, т.е. $\frac{\gamma}{2} = 45°$ и $\gamma = 90°$. Следователно $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.CB\sin\gamma = \frac{1}{2}3.4.1 = 6$.

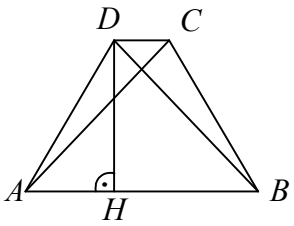


Задача 3 Да се реши уравнението $\frac{1}{x+1} - \frac{7x+4}{(x+1)(x-2)} = 3$.

Решение: Областта на допустимите стойности е $x \neq -1$ и $x \neq 2$. В нея уравнението е еквивалентно на $x - 2 - 7x - 4 = 3x^2 - 3x - 6$ или $3x(x+1) = 0$, чиито корени са $x = -1$ и $x = 0$. Но $x = -1$ не е от областта на допустимите стойности. Следователно уравнението има единствен корен $x = 0$.

Задача 4. Даден е равнобедрен трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD, AB > CD$) с основа AB =21, бедро AD = 16, и диагонал AC = 19. Да се намери периметърът на трапеца.

Решение: Понеже $ABCD$ е равнобедрен трапец, то $AC = BD = 19$. От ΔABD намираме $\cos\sphericalangle BAD = \frac{16^2+21^2-19^2}{2.16.21} = \frac{1}{2}$. Нека $DH \perp AB$. От ΔAHD намираме $AH = 8$. За малката основа CD имаме $CD = AB - 2.AH = 5$. Тогава $P_{ABCD} = AB + CD + 2AD = 58$.

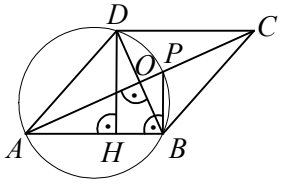


Задача 5. Да се реши уравнението $\sqrt{\sin 3x - \sin x + 2} = \sqrt{2}\sin 2x$.

Решение: Тъй като $|\sin 3x| \leq 1$ и $|\sin x| \leq 1$, то $\sin 3x - \sin x + 2 \geq 0$. Тогава при $\sin 2x \geq 0$ уравнението е еквивалентно на $\sin 3x - \sin x + 2 = 2\sin^2 2x$ или $\cos 2x(1-\sin x)(1+2\sin x) = 0$. Нека $\cos 2x = 0$, т.е. $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, откъдето $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi$, където k е цяло число. Нека $1 - \sin x = 0$, т.е. $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2l\pi$, където l е цяло число. Нека $1 + 2\sin x = 0$, т.е. $x_3 = \frac{7\pi}{6} + 2m\pi$ или $x_4 = \frac{11\pi}{6} + 2n\pi$ където m и n са цели числа. Проверяваме, кои от получените решения удовлетворяват $\sin 2x \geq 0$: $\sin 2x_1 = 1$, при $k = 2k_1$ – четно; $\sin 2x_1 = -1$, при k – нечетно; $\sin 2x_2 = 0$; $\sin 2x_3 = \sin\frac{\pi}{3} > 0$; $\sin 2x_4 = \sin\frac{5\pi}{3} < 0$. Окончателно решенията са: $x_1 = \frac{\pi}{4} + k_1\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2l\pi$ и $x_3 = \frac{7\pi}{6} + 2m\pi$.

Задача 6. Даден е ромб $ABCD$ с остър ъгъл при върха A. Окръжността описана около триъгълника ABD пресича диагонала AC в точка P. Ако $AP = 5\sqrt{5}$ и $PC = 3\sqrt{5}$, да се намери радиусът r на окръжността вписана в ромба.

Решение: Тъй като AC е симетрала на BD, то AP е диаметър на окръжността описана около ΔABD. Тогава $\sphericalangle ABP = 90°$ и $\Delta ABP \sim \Delta AOB$. Оттук $\frac{AB}{AO} = \frac{AP}{AB}$, т.е. $AB^2 = AP.AO$. Тъй като $AO = \frac{1}{2}(AP + PC) = 4\sqrt{5}$, то $AB = 10$. От ΔABD намираме $\sin\sphericalangle DAB = \frac{4}{5}$. Тогава, ако DH е височината на ромба, $DH = AD.\sin\sphericalangle DAB = 10.\frac{4}{5} = 8$. Тъй като $r = \frac{1}{2}DH$, то $r = 4$.



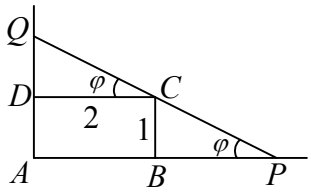
math-bg.com

Задача 7. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които неравенството $\frac{x}{ax-1} \geq \frac{2}{x}$ е изпълнено за всяко $x \geq 2$.

Решение: При $x \geq 2$ и $ax-1 \neq 0$ неравенството е еквивалентно на $(ax-1)(x^2-2ax+2) \geq 0$. При $a=0$ имаме $-(x^2+2) \geq 0$, което няма решение. При $a<0$, $x \geq 2$ имаме $ax-1<0$, така че трябва $g(x)=x^2-2ax+2 \leq 0$. Нека $D=a^2-2$ е дискриминантата на $g(x)$. При $D<0$, $g(x)>0$, а при $D \geq 0$ решението на $g(x) \leq 0$ е краен интервал. Следователно $a>0$. При $a>0$ и $D<0$ $ax-1>0$ при $a \in \left(\frac{1}{2};\sqrt{2}\right)$. Ако $D \geq 0$, $g(x) \geq 0$ за всяко $x \geq 2$, при $a \leq 2$ и $g(2)=6-4a \geq 0$, т.е. $a \leq \frac{3}{2}$. Оттук $a \in \left[\sqrt{2};\frac{3}{2}\right]$. Окончателно $a \in \left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$.

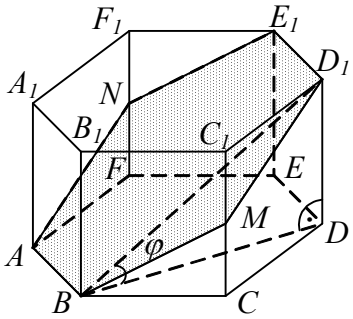
Задача 8. Даден е правоъгълник $ABCD$ със страни $AB=2$ и $BC=1$. Права през върха *C*, която не пресича страните на правоъгълника, пресича правите *AB* и *AD* съответно в точки *P* и *Q*. Да се намери тангенсът на ъгъла *APQ*, за който отсечката *PQ* има най-малка дължина.

Решение: Нека $\sphericalangle APQ=\varphi$. Тогава $PQ=PC+CQ=\frac{BC}{\sin\varphi}+\frac{CD}{\cos\varphi}=\frac{1}{\sin\varphi}+\frac{2}{\cos\varphi}$. Означаваме $f(\varphi)=\frac{1}{\sin\varphi}+\frac{2}{\cos\varphi}$, $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$. Имаме $f'(\varphi)=-\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}+\frac{2\sin\varphi}{\cos^2\varphi}=\frac{2\sin^3\varphi-\cos^3\varphi}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}=\cos\varphi\frac{2\mathrm{tg}^3\varphi-1}{\sin^2\varphi}$.



$f'(\varphi)=0$ при $\mathrm{tg}^3\varphi=\frac{1}{2}$ или $\mathrm{tg}\varphi=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Тъй като $f'(\varphi)<0$ при $\mathrm{tg}\varphi<\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $f'(\varphi)>0$ при $\mathrm{tg}\varphi>\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ и $\mathrm{tg}\varphi$ е растяща функция при $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$, то $f(\varphi)$ има единствен екстремум, който е минимум. Следователно *PQ* има най-малка дължина при $\mathrm{tg}\varphi=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Задача 9. Дадена е правилна шестоъгълна призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, такава че основният ръб е равен на околния ръб. Да се намери лицето на сечението на равнина α, определена от точките A, B и D_1 с призмата, ако $AB=1$.



Решение: Понеже призмата е правилна, то $AB \| DE$. Тогава $AB \| D_1E_1$ и ръбът E_1D_1 лежи в α. Ако $\alpha \cap CC_1=M$, $\alpha \cap FF_1=N$, сечението на α с призмата е шестоъгълника $ABMD_1E_1N$. Ортогоналната проекция на $ABMD_1E_1N$ върху основата на призмата е $ABCDEF$. Ако $S_{ABMD_1E_1N}=S$, $S_{ABCDEF}=S'$ и $\varphi=\sphericalangle[\alpha,(ABC)]$, то $S'=S\cos\varphi$. Понеже $BD \perp AB$, $DD_1 \perp AB$, то $AB \perp (BDD_1)$ и $\varphi=\sphericalangle DBD_1$. От ΔBCD намираме $BD=\sqrt{3}$, а от правоъгълния ΔBDD_1 – $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Тъй като $S'=6.\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, то $S=3$.

Задача 10. Нека *a*, *b* и *c* са реални числа и $f(x)=x^2+ax+b$. Ако уравнението $f(x)=0$ има два различни реални корена, а уравнението $(x^2-2x+c)^2+a(x^2-2x+c)+b=0$ няма реални корени, да се докаже, че $f(c)>1$.

Решение: Нека x_1 и x_2 са корените на $f(x)=0$. Тогава $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)$. Тъй като уравнението $f(x^2-2x+c)=(x^2-2x+c)^2+a(x^2-2x+c)+b=0$ няма реални корени, то $f(x^2-2x+c)=(x^2-2x+c-x_1)(x^2-2x+c-x_2)\neq 0$ за всяко *x*. Тогава квадратните уравнения $x^2-2x+c-x_1=0$ и $x^2-2x+c-x_2=0$ нямат реални корени, т.е. дискриминантите им са отрицателни: $1-(c-x_1)<0$ и $1-(c-x_2)<0$. Оттук следва, че $c-x_1>1$ и $c-x_2>1$. Тогава $f(c)=(c-x_1)(c-x_2)>1.1=1$.

Пълното решение на всяка задача се оценява с 4 точки. Оценката се получава по формулата 2 + 0,1.N, където N е броят на получените точки.

math-bg.com