Софийски Университет "Св. Климент Охридски"

Писмен конкурсен изпит по математика, 12 юли 2007г.

ТЕМА 1

Задача 1. Да се реши уравнението $x + \sqrt{x-1} = 7$.

Задача 2. Даден е триъгълник ABC със страни $AC = 5$, $BC = 4$ и ъглополовяща $CL = \dfrac{10}{3}$ ($L \in AB$). Да се намери дължината на страната AB.

Задача 3. Да се реши уравнението $4^{x+\frac{1}{2}} - 5.2^x = 3$.

Задача 4. Даден е трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB > CD$), в който може да се впише окръжност и около който може да се опише окръжност. Да се намерят дължините на страните на трапеца, ако периметърът и лицето му са съответно равни на 20 и 15.

Задача 5. Да се реши неравенството $\log_x \left(\dfrac{4x-6}{x-1}\right) < 1$.

Задача 6. Да се намерят най-малката стойност и най-голямата стойност на функцията

$$f(x) = \sin 3x + 10 \sin x.$$

Задача 7. В окръжност е вписан четириъгълник $ABCD$ със страни $AB = 7$, $CD = 1$ и взаимно перпендикулярни диагонали AC и BD. Да се намерят дължините на страните AD и BC, така че лицето на четириъгълника да е възможно най-голямо.

Задача 8. Допирателните към графиката на функцията $f(x) = 2x^2 - 2x + 3$ в точката A с абсциса 0 и в точката B с абсциса 1 се пресичат в точка C. Да се пресметне лицето на триъгълника ABC.

Задача 9. Дадена е четириъгълна пирамида $ABCDM$ с основа $ABCD$ и връх M. Околната стена ABM е перпендикулярна на основата, всички околни стени имат равни лица и всички околни ръбове имат дължина $\sqrt{5}$. Да се пресметне обемът на пирамидата.

Задача 10. Измежду всички квадратни функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, удовлетворяващи условията $|f(-1)| \leq 1$ и $|f(1)| \leq 1$, да се намерят тези, които имат възможно най-малка дискриминанта.

Време за работа - 5 часа

Драги кандидат-студенти,

- *номерирайте всички страници на беловата си;*
- *решението на всяка задача трябва да започва на нова страница;*
- *черновата не се проверява и не се оценява.*

Изпитната комисия ви пожелава успешна работа!