СМБ – Секция "Изток"

Великденско математическо състезание 12.04.2008 г.

10 клас

Времето за решаване е 120 минути.

Регламент: Всяка задача от 1 до 15 има само един верен отговор. "Друг отговор" се приема за решение само при отбелязан верен резултат. Задачите от 1 до 5 се оценяват с по 3 точки, от 6 до 10 с по 5 точки и от 11 до 15 с по 7 точки.

Организаторите Ви пожелават успех !

Име.....училище.....….....град.....

1. Корените на уравнението $\left(x^2+x+1\right)^2+2\left(x^2+x+1\right)-3=0$ са:

а) 1 и – 3; б) 0 и – 1; в) 0; г) друг отговор.

2. Стойността на израза $\left(\sqrt[5]{4}+\sqrt[5]{2^7}\right)\sqrt[5]{8}-\dfrac{\left(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^7}\right)}{\sqrt[3]{5}}$ е:

а) 0; б) $\sqrt[5]{2}-\sqrt[3]{5}$; в) – 20; г) друг отговор.

3. В правоъгълник *ABCD* с периметър 18 ъглополовящите на ъглите *ABC* и *BAD* се пресичат в точка *M* от страната *CD*. Лицето на Δ *AMB* е:

а) 9 ; б)18; в) $3\sqrt{2}$; г) друг отговор.

4. В кошница са поставени 5 зелени, 4 сини и 7 червени великденски яйца. Най-малко колко яйца трябва да се извадят, за да сме сигурни, че сме извадили поне две едноцветни яйца?

а) 3; б) 6; в) 4; г) друг отговор.

5. Автомобил пътувал 1 час със скорост 80 км/ч, 20 минути с 90 км/ч и 10 минути с 60 км/ч. Средната скорост на автомобила за целия път е:

а) 75 км/ч ; б) 76 ⅔ км/ч ; в) 80 км/ч; г) друг отговор.

6. На колко квадратни мерни единици е равно лицето на триъгълника с върхове пресечните точки на координатните оси с графиката на $f(x)=x^2+4x+2$?

а) $2\sqrt{2}$; б) $\left|-2+\sqrt{2}\right|$; в) $\left|-2-\sqrt{2}\right|$; г) друг отговор.

7. В равнобедрен Δ *ABC* точка *O* е център на вписаната окръжност, а *CH* е височина към основата. Ако *CO* = 5 и *OH* = 3, то основата на Δ *ABC* е:

а) 9; б) 12; в) $\sqrt{8}$; г) друг отговор.

8. В правоъгълен триъгълник с лице 8,5 дължините на катетите са цели числа. Хипотенузата е:

а) 17; б) $\sqrt{17}$; в) $\sqrt{290}$; г) друг отговор.

9. Равнобедрен триъгълник има периметър 72 и ъгъл при основата α, за който $\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$. Основата е:

а) 10; б) 24; в) $6\sqrt{2}$; г) друг отговор.

10. Разглеждаме всички трицифрени числа записани с различните ненулеви цифри a, b и c, в които всяка цифра се среща точно веднъж. Ако сборът им е 2886, най-голямото от тях е:

а) 931; б) 842; в) 987; г) друг отговор.

11. Ако $\lg 2=a$, то $\lg 25$ е : а) 2 – 2*a*; б) 5^a ; в) a^2 ; г) друг отговор.

12. Стойностите на реалния параметъра *m*, за които уравнението $x^4-mx^2+m^2-9=0$ има три реални и различни корена са: а) ± 3; б) 0; в) 3; г) друг отговор.

13. В Δ *ABC* ($\angle C=90^0$) вписаната окръжност дели *AB* на отсечки 3 и 10. Лицето на Δ *ABC* е:

а) 13; б) 30; в) $13\sqrt{2}$; г) друг отговор.

14. Произведението на първите *n* естествени числа завършва на 12 нули. Най-голямото възможно число *n* е:

а) 12; б) 50; в) 55; г) друг отговор.

15. За колко различни стойности на естественото число *k*, числото $\sqrt{k^2-2008}$ е цяло?

а) 2; б) 4; в) няма такива *k*; г) друг отговор.

math-bg.com

ОТГОВОРИ 10 клас

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Б	В	А	В	В	А	Б	В	Г 20	А	А	В	Б	Г 54	А

Кратки упътвания и решения:

1 зад. Полагаме $t = x^2 + x + 1$, и уравнението получава вида $t^2 + 2t - 3 = 0$ с корени 1 и -3. Връщайки се в полагането, за t = -3, няма решение, а за t = 1, корени са 0 и -1.

3 зад. Триъгълниците AMD и BMC са еднакви, равнобедрени и правоъгълни, тогава M е среда на CD и CD = 2 AD. От периметъра получаваме AD = 3, CD = 6. $S_{AMB} = S_{ABCD}/2 = 9$.

4 зад. Броят на яйцата е без значение. Ако първите три са различни, то четвъртото ще повтори един цвят.

5 зад. Общият път е $80.1 + 90.\frac{20}{60} + 60.\frac{10}{60} = 120км$. Общото време е 3/2 часа. $V_{ср} = \frac{120}{1{,}5} = 80км/ч$

6 зад. Нека пресечните точки с абсцисната ос са A и B, а с ординатната C, тогава $A(x_1;0)$, $B(x_2;0)$ и $C(0; f(0))$. $AB = |x_1 - x_2| = \left|-2 + \sqrt{2} - \left(-2 - \sqrt{2}\right)\right| = 2\sqrt{2}$, $f(0) = 2$. $S = \frac{AB.f(0)}{2} = 2\sqrt{2}$.

7 зад. От свойството на ъглополовящата за $\Delta\ BHC \Rightarrow BH:BC = OH:OC = 3:5$. Ако $BH = 3x$, $BC = 5x$ От Питагорова теорема за $\Delta\ BHC \Rightarrow (3x)^2 + 8^2 = (5x)^2 \Rightarrow x = 2$, $AB = 2BH = 6x = 12$.

8 зад. Ако катетите са a и b, то $ab = 2S = 17$. Тъй като a и b са цели числа те могат да са само 1 и 17 (17 е просто число), $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{290}$.

9 зад. Ако основата е a, бедрото – b и височината към основата - $h \Rightarrow \sin\alpha = \frac{h}{b} = \frac{12}{13}$. Ако $h = 12x$, то $b = 13x$, от Питагорова теорема получаваме $a = 10x$. От периметъра $\Rightarrow x = 2$, $AB = 20$.

10 зад. Всяка от цифрите се среща точно по два пъти като цифра на стотиците, на десетиците и на единиците.тогава сборът на всички числа е $222(a + b + c) = 2886 \Rightarrow a + b + c = 13$.

11 зад. Нека $\lg 5 = x$. От определението на логаритъм $2 = 10^a$, $25 = 10^x \Rightarrow 5 = \sqrt{10^x} = 10^{\frac{x}{2}}$. Ако умножим първото и последното равенство, получаваме $10 = 10^{a+\frac{x}{2}} \Rightarrow a + \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow x = 2 - 2a$

12 зад. Полагаме $x^2 = t$. Началното уравнение ще има точно три корена, ако квадратното има корени $t_1 = 0$ и $t_2 > 0$. $\Rightarrow \left|\begin{array}{l} t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 t_2 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} m > 0 \\ m^2 - 9 = 0 \end{array}\right.$.

13 зад. Нека допирните точки до AB, BC и AC са съответно M, N и P. $AM = AP = 3$, $BM = BN = 10$ и $CP = CN = x$. От Питагорова теорема $\Rightarrow (3 + x)^2 + (10 + x)^2 = 13^2 \Rightarrow x = 2$. Катетите са 5 и 12, $S = 6$.

14 зад. Всяка нула се появява при произведение на число кратно на 5 с четно число. Ако числото е кратно на 5^2, 5^3...5^k "носи" 2, 3…k нули. Първите 12 нули са от числата 5, 10, 15, 20, 25 (2 нули), 30, 15, 40, 45, 50 (2 нули). Последното число, което не „носи" нова нула е 54.

15 зад. $k^2 - 2008 = n^2$, където n е естествено число. $k^2 - n^2 = 2008 \Rightarrow (k - n)(k + n) = 2.2.2.251$. $k - n < k + n$ са с еднаква четност и са между делителите на 2.2.2.251. Има само две възможности $(k - n; k + n) = (2;1004) \cup (4;502)$. $(k;n) = (503;501) \cup (253;249)$.

Стефчо Наков
Монтана

math-bg.com