Секция "Изток" – СМБ

КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 9.12.2006 г.

10 клас

Времето за решаване е 120 минути.

Регламент: Всяка задача от 1 до 9 има само един верен отговор. "Друг отговор " се приема за решение само при отбелязан верен резултат. Задачите от 1 до 3 се оценяват с по 3 точки, задачите от 4 до 6 се оценяват с по 5 точки, задачите от 7 до 9 се оценяват с по 7 точки. Задача 10 се решава подробно и се оценява с 15 точки.

Организаторите Ви пожелават успех!

Име.....училище.....град.....

Зад 1. За острия ъгъл α е дадено $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, тогава стойността на $\cos\alpha$ е:

а) $\frac{12}{13}$; б) $\frac{8}{13}$; в) $\frac{13}{5}$; г) друг отговор.

Зад 2. Дадено е уравнението $x^2 + 2kx + 4 = 0$. Стойностите на реалния параметър k, за които уравнението има два реални и различни отрицателни корени са:

а) $k \neq \pm 2$; б) $k \in (-\infty, -2)$; в) $k \in (2, +\infty)$; г) друг отговор.

Зад 3. Даден е правоъгълен триъгълник с катет 4 и хипотенуза 5. Медианата към по – големия катет е:

а) $\sqrt{13}$; б) 2,5; в) $\sqrt{5}$; г) друг отговор.

Зад 4. За функцията $f(x) = ax^2 + bx + c$ е известно, че $f(0) > 0$, $f(1) < 0$ и $f(2) > 0$, тогава за корените x_1 и x_2 на уравнението $f(x) = 0$ е вярно условието:

а) са равни; б) са различни отрицателни числа;

в) са различни положителни числа; г) друг отговор.

Зад 5. Уравнението $\sqrt{2x-2} + \sqrt{7-7x} = \sqrt{4x^2 - 19x + 15}$ има корени:

а) числата ± 1; б) няма корени: в) $\forall x \in R$ г) друг отговор.

Зад 6. В трапеца ABCD частта от средна основа, заключена между диагоналите, е 3, $AC \cap BD = O$ така, че $AO : OC = 2 : 1$, тогава голямата основа на трапеца е :

а) 12; б) 6; в) 18: г) друг отговор.

Зад 7. Нека корените x_1 и x_2 на уравнението $x^2 - x - 1 = 0$, тогава числената стойност на израза $A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2$ е:

а) $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; б) 0; в) 2; г) друг отговор.

Зад 8. Общата външна допирателна на две външно допиращи се окръжности има дължина $12\sqrt{3}$. Дадено е, че двата радиуса са отнасят, както 1:3, тогава по-малкия от тях е:

а) $3\sqrt{3}$; б) $2\sqrt{3}$; в) 6; г) друг отговор.

Зад 9. Произведението на 2006 естествени числа е 2006, тогава най-малката сума на тези числа може да бъде:

а) 2006; б) 2097; в) 4011; г) друг отговор.

Зад 10. Даден е правоъгълен ΔABC с хипотенуза $AB = 12$ и височина $CH = 3$. Намерете катетите, медианата CM към хипотенузата и градусните мерки на острите ъгли на ΔABC.

math-bg.com

Отговори 10 клас

1а; 2в; 3а; 4в; 5г x=1; 6а; 7б; 8в; 9г 2081

1 зад. Основното тригонометрично тъждество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, за острия ъгъл α получаваме $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2 a} = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$.

2 зад. **Отг. В)** Условието се дефинира със системата $\left|\begin{array}{l} D>0 \\ x_1+x_2<0, \\ x_1x_2>0 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} 4k^2-16>0 \\ -2k<0 \\ 4>0 \end{array}\right.$ с решение

$\left|\begin{array}{l} k\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty) \\ k\in(0,+\infty) \\ \forall x \end{array}\right.$, окончателно $k\in(2,+\infty)$.

3 зад. Отг. А) Нека в *Δ ABC AC* = 4, *BC* = 3, *M* среда на *AC*. От Питагорова теорема за *Δ BMC* получаваме $BM^2 = BC^2 + AM^2 = 9+4 = 13 \quad \Rightarrow \quad BM = \sqrt{13}$.

4 зад. Отг. В) От условието *f(0)* > 0 и f*(1)* < 0 следва, че съществува корен $x_1 \in (0,1)$, а от *f(1)* < 0 и f*(2)* > 0 следва, че съществува корен $x_2 \in (1,2)$.

5 зад. За съществуването на първите два радикала са необходими условията $\left|\begin{array}{l} 2x-2\ge 0 \\ 7-7x\ge 0 \end{array}\right., \left|\begin{array}{l} x\ge 1 \\ x\le 1 \end{array}\right.$, с единствено решение x = 1, след заместване в даденото условие установяваме, че е решение.

6 зад. Отг. А) От $AB \| CD \Rightarrow \Delta ABO \sim \Delta CDO \Rightarrow AB : CD = AO : BO = 2:1$**.** Нека *CD* = *x*, тогава *AB* = 2*x*. Нека *M, N, P* и *Q* са среди, съответно на *AD, BC, AC* и *BD*. От свойството на средната основа, тези точки лежат на една права. От *Δ ABC* и *Δ BCD* средните отсечки *PN = AB/2 = x* и *QN = CD/2* , тогава 3 = *PQ = PN – QN = x/2*, *x* = 6. Окончателно *AB* = 2*x* = 12 .

7 зад. Отг. Б) D = 5 > 0, следователно корените са реални. От формулите на Виет

$\left|\begin{array}{l} x_1+x_2 = -\frac{b}{a} = 1 \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} = -1 \end{array}\right.$, заместваме в $A = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} - x_1x_2(x_1+x_2) = \frac{1}{-1} - (-1).1 = -1+1 = 0$.

8 зад. Отг. В) Да означим окръжностите $k_1(O_1,R_1)$ и $k_2(O_2,R_2)$, $R_1 = x$ тогава $R_2 = 3x$, T е общата точка на двете окръжности, MP $(M\in k_1, P\in k_2)$ е общата им допирателна. Построяваме $MK \| O_1O_2$ $(K\in O_2P)$. От успоредника O_1O_2KM получаваме, че отсечката $KM = O_1O_2 = R_1 + R_2 = 4x$, $KP = O_2P - O_2K = O_2P - O_1M = R_1 - R_2 = 2x$. От Питагорова теорема за $\Delta MKP \Rightarrow MP^2 = MK^2 - KP^2 = 16x^2 - 4x^2 = 12x^2$
$\Rightarrow MP = 2\sqrt{3}x = 12\sqrt{3}$, $x = R_1 = 6$.

9 зад. Отг. Г, 2081) Очевидно всички числа са делители на 2006, но 2006=2.17.59, следователно по-голямата част от числата са единици. Възможни са случаите:
2005 единици и 2006 $\Rightarrow$ сбор 2005.1 + 2006 = 4011;
2004 единици, 2 и 1003 $\Rightarrow$ сбор 2004.1 + 2 + 1003 = 3009;
2004 единици, 17 и 118 $\Rightarrow$ сбор 2004.1 + 17 + 118 = 2139;
2004 единици, 34 и 59 $\Rightarrow$ сбор 2004.1 + 34 + 59 = 2097 и
2003 единици, 2, 17 и 59 $\Rightarrow$ сбор 2003.1 + 2 + 17 + 59 =2081.

10 зад.

Нека *AC = b, BC = a* $\Rightarrow \left|\begin{array}{l} a^2+b^2 = 12^2 \\ ab = 12.3 \end{array}\right.$, решенията на системата са (с точност до еднаквост)

$AC = 3(\sqrt{6}\pm\sqrt{2})$, $BC = 3(\sqrt{6}\mp\sqrt{2})$. Медианата *CM = AB*/2 = 6.Да разгледаме случая *AC > BC*. В *Δ MHC CH* = ½ *CM* $\Rightarrow$ ъгъл *CMH* = 30^0, но *Δ AMC* е равнобедрен $\Rightarrow$
$30^0 = \angle HMC = \angle MAC + \angle ACM = 2\angle MAC$. Окончателно ъглите на *ABC* са 15^0 и 75^0.

Стефчо Наков - Монтана

math-bg.com