Секция "Изток" – СМБ

КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 10.12.2005 г.

10 клас

Времето за решаване е 120 минути.

Регламент: Всяка задача от 1 до 9 има само един верен отговор. "Друг отговор " се приема за решение само при отбелязан верен резултат. Задачите от 1 до 3 се оценяват с по 3 точки, задачите от 4 до 6 се оценяват с по 5 точки, задачите от 7 до 9 се оценяват с по 7 точки. Задача 10 се решава подробно и се оценява с 15 точки.

Организаторите Ви пожелават успех!

Име.....училище.....град.....

Зад.1 Корените на уравнението $\sqrt{x^2-x-20}+\sqrt{4-x^2}=1$ са:

а) 5; 2 б) – 4; 5 в) няма решение г) друг отговор

Зад.2 Даден е равнобедрен трапец с бедро 6 cm и височина 4,8 cm. Да се намери дължината на диагонала на трапеца, ако той е перпендикулярен на бедрото.

а) 16 cm б) $2\sqrt{3}$ cm в) $3\sqrt{2}$ cm г) друг отговор

Зад.3 При какви стойности на параметъра κ уравнението $x^2-2kx+k^2-k-6=0$ има два различни реални корена с еднакви знаци.

а) $k\in(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$ б) $k\in[-6;-2)\cup(3;+\infty)$ в) $k\in(-6;-2)\cup(3;+\infty)$ г) друг отговор

Зад.4 Намерете стойността на параметъра m в уравнението $x^2-4x+m=0$ така, че корените му x_1 и x_2 да изпълняват условието $x_1^3+x_2^3=7$.

а) $4\frac{3}{4}$ б) 4 в) няма решение г) друг отговор

Зад.5 Точката $A(4;2)$ принадлежи на графиката на квадратната функция $f(x)=-x^2+7x+a$. Колко квадратни мерни единици е лицето на триъгълник с върхове пресечните точки на графиката на функцията с абсцисната ос и дадената точка:

а) 6 б) 3 в) 12 г) друг отговор

Зад.6 Дадени са окръжностите $k_1(O_1;d=AB=14r)$ и $k_2(O_2;r)$, като $O_1O_2=5r$. В окръжността k_1 е построена хорда BC, която се допира до k_2 в точката P и BP:PC = 1:6. Дължината на BC е:

а) $\sqrt{3}r$ б) $6\sqrt{3}r$ в) $2\sqrt{6}r$ г) друг отговор

Зад.7 Дадена е функцията $f(x)=ax^2+bx+c$. Ако $a>0$, $f(b)=f(3)$ и абсцисата на върха на параболата е 1, то b е равно на:

а) -3; б) 1,5 в) -1 г) друг отговор

Зад.8 Върху всяка медиана на даден триъгълник е взета точка, деляща съответната медиана в отношение 1:3 считано от върха на триъгълника, от който медианата излиза. Колко пъти лицето на триъгълника с върхове построените точки е по-малко от лицето на дадения триъгълник.

а) $\frac{1}{3}$ б) 2,56 в) $\frac{1}{9}$ г) друг отговор

Зад.9 Ако числото a е такова, че за неравенството $1+\frac{1}{x-1}+\frac{2x+7}{x^2-ax+2}\le 0$ числото 2 е недопустима стойност за x, то решенията на неравенството са:

а) $(1;2)$ б) $[1;2]$ в) $\left[-\sqrt{7};1\right]\cup\left[2;\sqrt{7}\right]$ г) друг отговор

Зад.10 Решете неравенството $x(x-1)(x+1)(x+2)\le 24$.

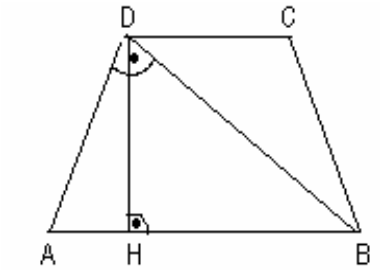
math-bg.com

Решения – 10 клас

ОТГОВОРИ: 1в; 2г–8 cm; 3в); 4а; 5б; 6г- $7\sqrt{3}r$; 7в; 8б; 9а.

1 зад. ДС са $\left|\begin{array}{l} x^2-x-20\ge 0 \\ 4-x^2\ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x\in(-\infty;-4]\cup[5;+\infty) \\ x\in[-2;2] \end{array}\right. \Rightarrow x\in\varnothing$ т. е. уравнението няма решение.

2 зад.



Δ AHD правоъгълен $\Rightarrow AH=\sqrt{AD^2-DH^2}=\sqrt{6^2-4{,}8^2}=3{,}6\ cm.$

Δ ABD правоъгълен $\Rightarrow DH^2=AH.BH \Leftrightarrow 4{,}8^2=3{,}6.BH \Leftrightarrow BH=6{,}4\ cm$

Δ ABD правоъгълен $\Rightarrow BD^2=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8\ cm$

3 зад. За да бъде изпълнено условието на задачата е необходимо

$\left|\begin{array}{l} D>0 \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 4k^2-4\left(k^2-k-6\right)>0 \\ k^2-k-6>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} k+6>0 \\ (k-3)(k+2)>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} k>-6 \\ k\in(-\infty;-2)\cup(3;+\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k\in(-6;-2)\cup(3;+\infty)$

4 зад. От формулите на Виет следва, че $x_1+x_2=4$ и $x_1.x_2=m$.

$x_1^3+x_2^3=7 \Leftrightarrow (x_1+x_2)\left(x_1^2-x_xx_2+x_x^2\right)=7 \Leftrightarrow (x_1+x_2)\left((x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right)=7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\left(4^2-3m\right)=7 \Rightarrow m=4{,}75.$

5 зад. Точката $A(4;2)$ принадлежи на графиката на функцията, следователно нейните координати удовлетворява функционалната зависимост $2=-16+28+a \Rightarrow a=-10$.

За да намерим пресечните точки на графиката на функцията с абсцисната ос трябва да решим уравнението $f(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+7x-10=0 \Rightarrow x_1=2;\ \ x_2=5.$ Разстоянието между абсцисите на намерените точки е 3 мерни единици. Разстоянието от т. А до абсцисната ос е ординатата на точка А т. е. 2 мерни единици. Лицето на триъгълника е $\dfrac{3.2}{2}=3$ м. е^2.

6 зад. $AB=14r,\ O_1O_1=5r,\ \ O_1B=7r,\ \ O_2B=2r.$ $\Delta\ O_2PB$ е правоъгълен

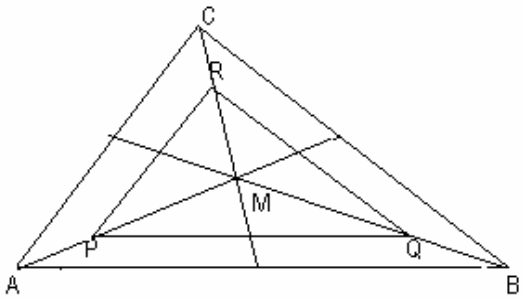
$\Rightarrow O_2P^2+BP^2=O_2B^2 \Leftrightarrow r^2+BP^2=4r^2 \Leftrightarrow BP=\sqrt{3}r,\ \ BC=7BP=7\sqrt{3}r.$

7 зад. Върхът на параболата има абсциса $-\dfrac{b}{2a}=1 \Rightarrow b=-2a.$

От $f(b)=f(3) \Leftrightarrow ab^2+b^2+c=9a+3b+c \Leftrightarrow ab^2+b^2-9a-3b=0$. Съставяме системата

$\left|\begin{array}{l} b=-2a \\ ab^2+b^2-9a-3b=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow 4a^3+4a^2-9a+6a=0 \Rightarrow a=-\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}.$ По условие $a>0 \Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$ и $b=-1.$

8 зад.



math-bg.com

Δ ABM ~ Δ PQM – I признак

1. $\frac{AM}{PM}=\frac{8}{5}$
2. $\frac{BM}{QM}=\frac{8}{5}$
3. $\angle AMB-$ общ

Следователно $\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle PQM}}=\left(\frac{8}{5}\right)=2{,}56$

9 зад. При $x=2\Rightarrow x^2-ax+2=0$ т. е $2^2-2a+2=0\Rightarrow a=3.$ Решаваме неравенството

$1+\frac{1}{x-1}+\frac{2x+7}{x^2-3x+2}\le 0$ ДС $x\ne 1;2$

$1+\frac{1}{x-1}+\frac{2x+7}{(x-1)(x-2)}\le 0\Leftrightarrow \frac{x^2+7}{(x-1)(x-2)}\le 0\Rightarrow x\in(1;2).$

10 зад. $x(x-1)(x+1)(x+2)\le 24\Leftrightarrow (x(x+1))((x-1)(x+2))\le 24\Leftrightarrow (x^2+x)(x^2+x-2)\le 24$

Полагаме $x^2+x=u$ и даденото уравнение се свежда до квадратно $u(u-2)\le 24\Leftrightarrow u^2-2u-24\le 0\Leftrightarrow u_1=6,\ \ u_2=-4.$ Връщаме се в полагането и решаваме квадратните уравнения $x^2+x=6$ или $x^2+x=-4$. Корените на първото уравнение са 2 и – 3, а второто уравнение няма реални корени. Решаваме неравенството по метода на интервалите и получаваме, че $x\in[-3;2]$.

math-bg.com