

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО
МАТЕМАТИКА

1 септември 2009 г. – Вариант 2

УВАЖАЕМИ ЗРЕЛОСТНИЦИ,

Тестът съдържа **28 задачи** по математика от **два вида**:

- 20 задачи със структуриран отговор с четири възможни отговора, от които само един е верен;
- 8 задачи със свободен отговор.

Първите 20 задачи (от 1. до 20. включително) в теста са от затворен тип с четири възможни отговора, обозначени с главни букви от А до Г, от които само един е верен. Отговорите на тези задачи отбелязвайте със син/черен цвят на химикалката в **листа за отговори**, а не върху тестовата книжка. Отбелязвайте верния отговор със знака **X** в кръгчето с буквата на съответния отговор. Например:

(A) (B) (C) (D)

Ако след това прецените, че първоначалният отговор не е верен и искате да го поправите, запълнете кръгчето с грешния отговор и отбележете буквата на друг отговор, който приемате за верен. Например:

(A) (C) (D)

За всяка задача трябва да е отбелязан не повече от един действителен отговор. Като действителен отговор на съответната задача се приема само този, чиято буква е отбелязана със знака X.

Отговорите на задачите със свободен отговор (от 21. до 28. вкл.) запишете в предоставения **свитък за свободните отговори**, като за задачи от 26. до 28. вкл. запишете пълните решения с необходимите обосновки.

ПОЖЕЛАВАМЕ ВИ УСПЕШНА РАБОТА!

Отговорите на задачите от 1. до 20. вкл. отбелязвайте в листа за отговори!

1. Дадени са числата $M = 3\frac{1}{3}\%$ от 20 и $N = 0,667$. Вярно е, че:

- A) $M > N$ B) $M < N$ C) $M = N$ D) M и N не могат да се сравнят

2. Сумата $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$ е равна на:

- A) $4 - 2\sqrt{3}$ B) -4 C) 0 D) $4 + 2\sqrt{3}$

3. Изразът $\frac{2-x}{x+3} : \frac{x^2-4}{2x}$ е дефиниран при:

- A) $x \neq 0$ B) $x \neq 0, x \neq -3$ C) $x \neq 0, x \neq 2, x \neq -2$ D) $x \neq 0, x \neq -3, x \neq \pm 2$

4. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 + 10x + 20 = 0$, то стойността на израза $\frac{x_1x_2^2 + x_1^2x_2}{30 + x_1 + x_2}$ е:

- A) -10 B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 5

5. Броят на пресечните точки на графиките на функциите $f(x) = x^2 - 5x + 3$ и $g(x) = 1 + x^2$ са:

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

6. Корените на уравнението $(x-3)\sqrt{x-5} = 0$ са числата:

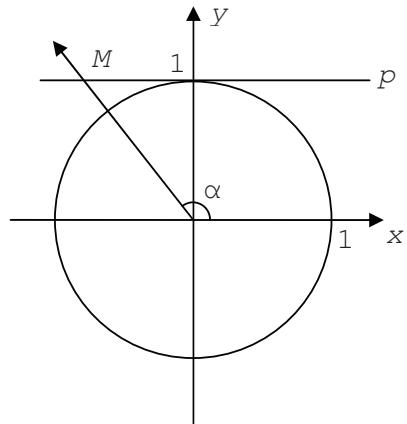
- A) 3 B) 3 и 5 C) 5 D) 5 и 9

7. Стойността на израза $\log_3 9 - \lg \frac{1}{100} - 2^{2009} \cdot \log_5 1$ е равна на:

- A) 0 B) 1 C) 4 D) 5

8. Решенията на неравенството $\frac{3-x}{x-1} \leq 0$ са:

- A) $x \in [1;3]$ B) $x \in (-\infty;1) \cup [3;+\infty)$
B) $x \in (1;3]$ D) $x \in (-\infty;1] \cup (3;+\infty)$



9. На чертежа е построена единичната окръжност и права p , която се допира до окръжността в точка с ордината 1. Първото рамо на ъгъл α съвпада с положителната посока на абцисната ос. Второто рамо на ъгъл α пресича правата p в точка M , както е показано на чертежа. За ъгъл α абцисата на точка M е стойността на функцията:

- | | |
|------------|--------------|
| А) синус | Б) косинус |
| В) тангенс | Г) котангенс |

10. Дадена е окръжност $k(O, r = 0,8 \text{ cm})$ и точки A и B от окръжността, такива че радианната мярка на $\angle AOB$ е 5 . Дълчината на принадлежащата дъга AB на този ъгъл е:

- | | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| А) 2 cm | Б) 4 cm | В) 6 cm | Г) 8 cm |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|

11. За геометричната прогресия a_1, a_2, \dots, a_5 е известно, че $a_3 = -2$. Произведението $a_1 \cdot a_5$ е равно на:

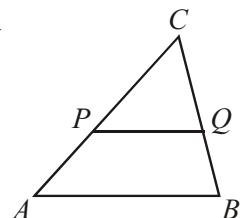
- | | | | |
|---------|---------|--------|--------|
| А) -4 | Б) -2 | В) 2 | Г) 4 |
|---------|---------|--------|--------|

12. Ако средното аритметично на числата $a, -5, -3$ и -2 е равно на -1 , то числото a е:

- | | | | |
|---------|--------|--------|--------|
| А) -4 | Б) 5 | В) 6 | Г) 8 |
|---------|--------|--------|--------|

13. Ако на чертежа $AC : PC = 5 : 3$ и $PQ \parallel AB$, то отношението на лицата $S_{PQC} : S_{ABQP}$ е равно на:

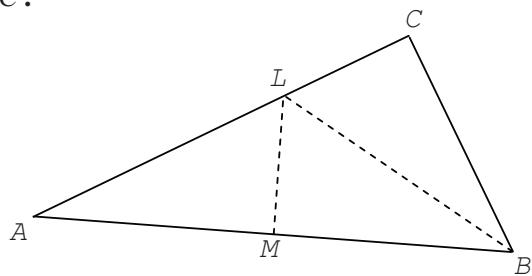
- | | | | |
|------------|------------|-------------|-------------|
| А) $3 : 5$ | Б) $3 : 2$ | В) $9 : 25$ | Г) $9 : 16$ |
|------------|------------|-------------|-------------|



14. В $\triangle ABC$ BL е ъглополовящата на $\angle ABC$, LM е медиана в \triangleABL , $AL = BL = 2\sqrt{3}$, $LC = \sqrt{3}$ и $\triangle ALM \sim \triangle ABC$.

Страната BC на $\triangle ABC$ е равна на:

- | | | | |
|--------|--------|----------------|----------------|
| А) 3 | Б) 6 | В) $2\sqrt{3}$ | Г) $3\sqrt{3}$ |
|--------|--------|----------------|----------------|



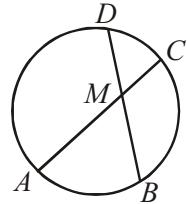
15. На чертежа хордите AC и BD се пресичат в точка M . Ако $BM = 12 \text{ cm}$, $DM = 9 \text{ cm}$ и $AM : AC = 4 : 7$, то НЕ е вярно, че:

A) $AB \parallel CD$

Б) $S_{AMB} : S_{DMC} = 2 : \sqrt{3}$

В) $S_{AMD} : S_{DMC} = 4 : 3$

Г) $DC : AB = 3 : 4$



16. Вписаната в правоъгълен триъгълник окръжност се допира до хипотенузата AB в точка M . Отсечката AM е 4, а хипотенузата е 10. Лицето на триъгълника е:

A) 12

Б) 24

В) 40

Г) 48

17. Ако BC е най-голямата страна в разностранния ΔABC , а d е диаметърът на описаната около триъгълника окръжност и $BC : d = 1 : \sqrt{2}$, то мярката на $\angle BAC$ е:

A) 45°

Б) 135°

В) 120°

Г) 60°

18. В остроъгълния ΔABC страната $BC = 7 \text{ cm}$ и $AB = 5 \text{ cm}$. Ако R е радиусът на описаната около триъгълника окръжност и $BC : R = \sqrt{3}$, то дълчината на страната AC е равна на:

A) 6 cm

Б) $\sqrt{39} \text{ cm}$

В) 8 cm

Г) $\sqrt{109} \text{ cm}$

19. ΔABC е равностранен със страна $AB = 4\sqrt{3} \text{ cm}$.

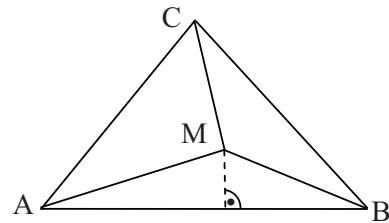
Точка M е вътрешна за триъгълника и е такава, че лицата на триъгълниците ABM , BCM и ACM се отнасят съответно както $1:2:3$. Разстоянието от M до AB е равно на:

A) 1 cm

Б) 2 cm

В) 3 cm

Г) 6 cm



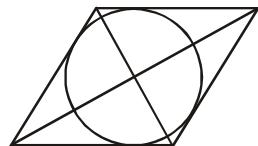
20. Ако страната на ромб е 12 cm и един от ъглите му е 60° , то радиусът на вписаната в ромба окръжност е равен на:

A) 3 cm

Б) $3\sqrt{3} \text{ cm}$

В) 6 cm

Г) $6\sqrt{3} \text{ cm}$



Отговорите на задачите от 21. до 25. вкл. запишете в свитъка за свободните отговори!

21. Запишете най-малкото цяло число x , за което е изпълнено неравенството

$$2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x < 7$$

22. Ако се съберат първият и пети член на аритметична прогресия се получава 18, а ако от седмия се извади сборът на втория и трети член на тази прогресия се получава 1. Намерете сбора на първите 10 члена на прогресията.

23. Намерете стойността на израза $\operatorname{tg} 75^\circ + \frac{1}{\operatorname{tg} 75^\circ}$.

24. Основата на равнобедрен триъгълник е 30 cm, а центърът на вписаната в триъгълника окръжност дели височината към основата в отношение 5:13, считано от основата. Да се намери лицето на триъгълника в квадратни сантиметри.

25. Нека k е случаино избрано число между 5 цели числа. Намерете вероятността числото $\cot g\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$ да е ирационално число.

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. вкл. запишете в свитъка за свободните отговори!

26. Решете уравнението $\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} + 1 = 6\sqrt{\frac{x-3}{x+3}}$.

27. Дадени са пет отсечки с дължини 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm и 6 cm. Каква е вероятността три случаино избрани от тях да могат да образуват триъгълник?

28. В триъгълника ABC $BC = 6 \text{ cm}$, $AC = 8 \text{ cm}$. Ъглополовящата през върха C пресича описаната около триъгълника окръжност в точка L . Да се намери страната AB в сантиметри, ако $CL = AC$.

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\text{Формули на Виет} \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Квадратна функция

Графиката на $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ е парабола с връх точката $(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a})$

Корен. Степен и логаритъм

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| \quad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a; \quad \text{при } k \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}; \quad \text{при } a > 0, n \geq 2, k \geq 2 \text{ и } n, m, k \in \mathbb{N}$$

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b \quad \log_a a^x = x \quad a^{\log_a b} = b; \quad \text{при } b > 0, a > 0, a \neq 1$$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n = 1.2.3\dots(n-1)n = n!$

Брой на вариациите на n елемента k -ти клас: $V_n^k = n.(n-1)\dots(n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k -ти клас: $C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n.(n-1)\dots(n-k+1)}{1.2.3\dots(k-1)k}$

Вероятност $P(A) = \frac{\text{брой на благоприятните случаи}}{\text{брой на възможните случаи}}$ $0 \leq P(A) \leq 1$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n = a_1 + (n-1)d$ $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ $S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$

Формула за сложна лихва: $K_n = K \cdot q^n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1c$ $b^2 = b_1c$

$$h_c^2 = a_1 \cdot b_1 \quad r = \frac{a+b-c}{2} \quad \sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}$$

Произволен триъгълник: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Формула за медиана: $m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$ $m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$

$$m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c^2 = ab - nm$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
 $S = pr$ $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab \sin \alpha$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin \varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

α^0	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{cotg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$
sin	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
cos	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$
tg	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \mp 1}{\operatorname{cotg} \beta \pm \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$